Exercices Série 11

1) Calculez l'angle entre les vecteurs $\vec{x} = (2,3)$ et $\vec{y} = (5,1)$.

2) Trouvez le système d''équations paramétriques ainsi que l'équation cartésienne de la droite passant par le point $A = (1,3)$ et de direction orthogonale à $\vec{x} = (-3,2)$.

Réponses

1) Rappelons que que

$cos(\theta) = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$

Or, $\|\vec{x}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$
Or, $\|\vec{y}\| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$
Et $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13$
Donc $cos(\theta) = \frac{13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{13^2\cdot 2}} = \frac{13}{13\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Il s'agit donc de trouver
$\theta = Arcos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

2) Le système d'équations paramétriques est donné par l'équation

$$P = A + t \times P\vec{y}$$

où $\vec{y}$ est parallèle à la droite. Pour trouver un vecteur parallèle depuis le vecteur perpendiculaire, il suffit de trouver $\vec{y}$ tel que $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$. Le vecteur $\vec{y} = (2,3)$ fera l'affaire.
Le système d'équations paramétriques est alors

$$\begin{cases} p_1 = 1 + 2t \\ p_2 = 3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

L'équation cartésienne de tout point $P = (p_1, p_2)$ sur la droite perpendiculaire à $\vec{x}$ et passant par $A = (a_1, a_2)$ se trouve en isolant $t \in \mathbb{R}$ dans les deux équations et poser l'égalité entre les deux membres, ce qui donne :
$\frac{p_1+1}{2} = \frac{p_2-3}{3}$, donc

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{2} = 0}$$

Vérifions que $A = (1,3)$ est bien sur la droite :

$$\frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{2} = 0.5 - 1 + 0.5 = 0.$$